DEVOIR MAISON I

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Ce devoir n'est pas noté. Vous pouvez utiliser toutes les ressources qui vous semblent pertinentes mais il est vivement conseillé de vous mettre dans des conditions d'examen. Si vous avez besoin de vous référer au cours, assurez-vous de mémoriser les résultats ou méthodes qui vous ont servi.

2. Vous pouvez travailler à plusieurs mais de préférence en petits groupes de 3 ou 4 étudiants. Faites alors attention à laisser chacun s'exprimer et participer à la résolution de l'exercice. Ne passez pas à la question suivante avant de vous être assurés que chaque membre du groupe a compris la solution.

3. Dans ce cas, indiquez les autres étudiants avec qui vous avez travaillé.

4. Même dans le cas d'un travail en commun, chacun doit **rédiger sa propre solution**.

5. L'un des objectifs de ce devoir est de perfectionner sa qualité de rédaction. Vous prendrez donc soin d'attacher une importance particulière à votre manière de rédiger (précision du raisonnement, résultats du cours cités avec rigueur, faire attention aux connexions logiques,...).

Date: 16 Septembre 2024.
http://louismerlin.fr.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $m \in [\![0, n-1]\!]$. Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats, dont voici le protocole :

- On place un rat devant n couloirs.
- Au bout de l'un d'eux se trouve sa nourriture préférée, tandis qu'au bout des autres, il n'y a rien.
- Le rat teste aléatoirement les couloirs jusqu'à ce qu'il trouve la nourriture. A chaque fois que le rat teste un couloir, on dit que le rat fait un *trajet*, même si il avait déjà testé ce couloir précédemment.
- L'expérience s'arrête lorsque le rat trouve la nourriture pour la première fois.

On note R_n l'événement : "le rat trouve la nourriture en moins de n trajets".
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : "le rat trouve la nourriture lors du k^{e}trajet".
On note (H_m) l'hypothèse : le rat se souvient exactement des m derniers trajets mais pas de ceux d'avant.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.

Autrement dit, les événements "le rat trouve la nourriture lors du k^{e}trajet" et "le rat trouve la nourriture pour la première fois lors du k^{e}trajet" coincïdent.

On se place dans le cas $n = 3$.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k)$ puis en déduire $\mathbb{P}(R_n)$ dans chacun des cas suivants :

a. sous l'hypothèse (H_0) (le rat n'a aucun souvenir des trajets précédents).

b. sous l'hypothèse (H_1) (le rat se souvient uniquement du dernier trajet).

c. sous l'hypothèse (H_2) (le rat se souvient exactement des deux derniers trajets).

On pourra présenter les résultats dans un tableau récapitulatif.

3. Les chercheurs possèdent trois rats. Le premier à une mémoire (H_0), le deuxième une mémoire (H_1) et le dernier une mémoire (H_2). Calculer $\mathbb{P}(R_n)$ en supposant que le rat est choisit au hasard parmi les trois.

On revient au cas général ($n \geqslant 1$ et $m \in [\![0, n-1]\!]$) et on suppose que l'hypothèse (H_m) est vérifiée.

4. Donner, en justifiant brièvement, la valeur de $\mathbb{P}(R_n)$ dans le cas où $m = n - 1$.

5. On suppose dans cette question que $m \in [\![0, n-2]\!]$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ en séparant les cas $1 \leqslant k \leqslant m+1$ et $m+2 \leqslant k \leqslant n$.

b. En déduire $\mathbb{P}(R_n)$.

c. Montrer que la formule obtenue reste valable pour $m = n - 1$.

6. On fixe l'entier m. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - e^{-1}$. *(On donne $1 - e^{-1} \simeq 0,63$)*

Des rats d'un autre genre.

7. Les chercheurs ont trouvé comment créer des X-rats©, capables d'accroître leurs capacités de mémoire à l'infini en s'entraînant dans des labyrinthes toujours plus grand. Leur rat le plus performant, baptisé Gauss, a une mémoire de type (H_m) où $m = \lfloor \alpha n \rfloor$ avec $\alpha \in]0, 1[$ (α est fixé).

On suppose que c'est le X-rat© Gauss qui participe à l'expérience dans cette question.

a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - (1-\alpha)e^{-1}$.

b. En déduire la valeur minimale pour α si l'on souhaite que le X-rat© Gauss réussisse à trouver la nourriture en moins de n trajets plus de 9 fois sur 10 lorsque n est très grand ?

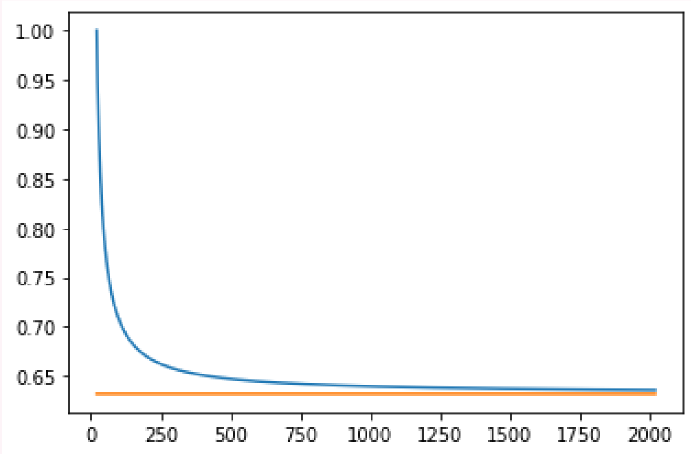
Partie informatique.

8. Compléter le programme Python suivant pour qu'il trace les 2000 premiers termes de la suite $(\mathbb{P}(R_n))_{n\geq 21}$ sous l'hypothèse H_{20}.

```python
import numpy as np \nl %
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(21,2022)]
C = [1-np.exp(-1) for n in A]
m = 20
U = .........
plt.plot(A,U)
plt.plot(A,C)
```

On obtient le tracé :

Affichage Python.



Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

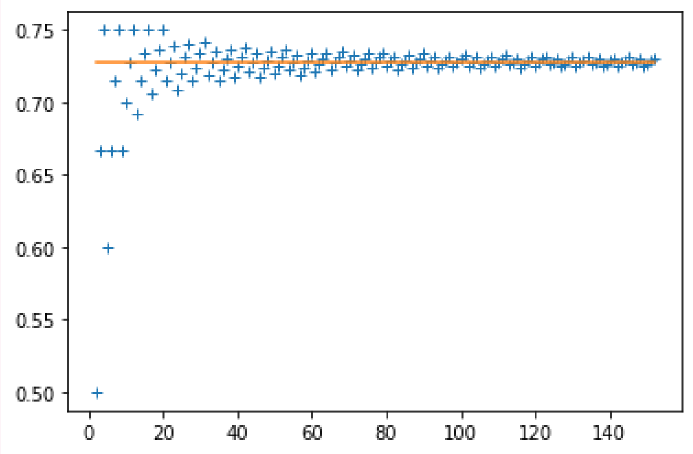
9. Ecrire une fonction en Python, nommée PlusPetitReussite, qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le plus petit entier m vérifiant : $\mathbb{P}(R_n) \geqslant \frac{9}{10}$ sous l'hypothèse (H_m).

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n cet entier m minimal.

10. On affiche ci-dessous le tracé obtenu en utilisant le programme Python suivant :

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(2,153)]
C = [1-np.exp(1)/10 for n in A]
U = [PlusPetitReussite(n)/n  for n in A]
plt.plot(A,C)
plt.plot(A,U,"+")
```

Affichage Python.



Que conjecturez-vous comme équivalent de u_n ?